Capítulo 2
Análisis espectral de señales

Objetivos

1. Se pretende que el alumno repase las herramientas necesarias para el análisis espectral de señales.
2. Que el alumno comprenda el concepto de espectro desde una perspectiva matemática.

Contenido

1. Energía ypotencia
2. Señal energía y señal potencia
3. Ejemplo de señal energía
4. Ejemplo de señal potencia
5. Valor eficaz de una señal potencia periódica
6. La serie trigonométrica de Fourier
7. Teorema de Parseval para señales potencia periódicas
8. Ejemplo de aplicación del teorema de Parseval para señales potencia
9. Transformada de Fourier
10. Teorema de Parseval para señales energía
11. Ejemplo: cálculo de la curva función densidad espectral de energía
12. Ejemplo de aplicación del teorema de Parseval
13. Propiedades de la convolución
14. Propiedades de la correlación

El presente apunte no es un sustituto para la información más completa que proporcionan autores como B.P. Lathi o H. P. Hsu. El objetivo de este texto es agregar la terminología que requieren los alumnos para el curso de Sistemas de Comunicaciones.

Energía y potencia

A continuación se desarrollan fórmulas para el cálculo de la energía requerida por una señal y de la potencia o rapidez de consumo d energía. Adicionalmente, se realiza una análisis dimensional o de unidades con lo que se verifica la validez de las ecuaciones. Para nuestro caso particular, trabajamos con señales temporales cuyas magnitudes se miden en volts, es decir $[v]$

Energía Media

El promedio de energía consumida por una señal durante un intervalo de tiempo T se calcula como

$$\xi\{f(t)\} = \int_T f^2(t)dt\,[v^2 s] \tag{2.1}$$

Potencia Media

La rapidez promedio con la que se consume energía se define como la energía consumida, dividida por el intervalo de consumo, es decir:

$$S\{f(t)\} \quad = \quad \frac{\xi\{f(t)\}}{T}\frac{[v^2 s]}{[s]} \tag{2.2}$$

Sustituyendo la ecuación 2.1 en la ecuación 2.2 resulta:

$$S\{f(t)\} = \frac{1}{T}\int_T f^2(t)dt\,[v^2] \tag{2.3}$$

Energía Media Total

La energía consumida por una señal cualquiera $f(t)$, durante un periodo infinito se calcula como:

$$\xi_T\{f(t)\} = lim_{T\to\infty} \int_T f^2(t)dt\,[v^2s] \tag{2.4}$$

Potencia Media Total

La rapidez de consumo de energía de una señal, durante un tiempo infinito se calcula como:

$$S_T\{f(t)\} = lim_{T\to\infty} \frac{\xi\{f(t)\}}{T} \tag{2.5}$$

Sustituyendo la ecuación 2.4 en la ecuación 2.5 se logra

$$S_T\{f(t)\} = lim_{T\to\infty} \int_T \frac{f^2(t)dt}{T}[v^2] \tag{2.6}$$

Señal energía y señal potencia

Señal energía

Se trata de una señal con las siguientes características

- Energía media total finita, es decir requiere de un consumo finito de energía

$$\xi_T\{f(t)\} < \infty \tag{2.7}$$

- Potencia media total cero

$$\begin{aligned} S_T\{f(t)\} &= lim_{T\to\infty} \frac{\xi\{f(t)\}}{T} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

- Son señales de duración finita
- Son señales de duración infinita pero que concentran su energía en un pequeño intervalo.

Señal potencia

Se trata de una señal con las siguientes características

- Energía media total infinita, es decir, requiere de un consumo infinito de energía

$$\xi_T\{f(t)\} = \infty \tag{2.9}$$

- Potencia media total finita

$$\begin{aligned} S_T\{f(t)\} &= lim_{T\to\infty}\frac{\xi\{f(t)\}}{T} \\ &< \infty \end{aligned} \tag{2.10}$$

- Las señales periódicas, las cuales son de duración infinita
- Las señales aleatorias, las cuales son de duración infinita.

Ejemplo de señal energía

Sea la función exponencial unilateral

$$f(t) = \mu_{-1}(t)e^{-\alpha t} \qquad \propto > 0 \tag{2.11}$$

Energía media total

La energía promedio total de esta función se calcula sustituyendo la ecuación 2.11 en la integral de la ecuación 2.4

$$\xi_T\{\mu_{-1}(t)e^{-\alpha t};\quad \propto > 1\} = lim_{T\to\infty}\int_T \mu_{-1}(t)e^{-2\alpha t}dt\;[v^2s]$$

El intervalo de integración va de 0 a infinito debido al escalón unitario.

$$\begin{aligned} \xi_T\{\mu_{-1}(t)e^{-\alpha t}; \quad \propto > 1\} &= \int_0^\infty \mu_{-1}(t)e^{-2\alpha t}dt \\ &= -\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{2\alpha}e^{-\infty} + \frac{1}{2\alpha}e^0 \\ &= \frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$

Así que el consumo total de energía de la señal exponencial unilateral es una cantidad medible dada por:

$$\xi_T\{\mu_{-1}(t)e^{-\alpha t}; \quad \propto > 0\} = \frac{1}{2\alpha} \tag{2.12}$$

Potencia promedio total

La rapidez promedio del consumo de energía, durante un intervalo infinito de tiempo se calcula sustituyendo la ecuación 2.12 en la ecuación 2.5:

$$S_T\{\mu_{-1}(t)e^{-\alpha t}; \quad \propto > 1\} = lim_{T\to\infty}\frac{1/2\alpha}{T}$$

Entonces resulta que

$$S_T\{\mu_{-1}(t)e^{-\alpha t}; \quad \propto > 1\} = 0 \tag{2.13}$$

Ejemplo de señal potencia

Sea la siguiente señal periódica

$$f(t) = Asen(\omega_0 t) \tag{2.14}$$

Teorema de potencia para señales periódicas

La potencia media total de una señal periódica es igual a la potencia de la misma señal en un periodo, es decir

$$S_T\{f(t)\} = lim_{T\to\infty}\int_T \frac{f^2(t)dt}{T}[v^2] = \int_T \frac{f^2(t)dt}{T}[v^2] \tag{2.15}$$

Potencia media total

La potencia en un periodo de la señal senoidal se calcula sustituyendo la ecuación 2.14 en la ecuación 2.3

$$S_T\{Asen(\omega_0 t)\} = \frac{1}{T}\int_T A^2 sen^2(\omega_0 t)dt$$

Entonces tendremos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
S_T\{sen(\omega_0 t)\} &= \frac{A^2}{T}\int_T \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos(2\omega_0 t)\right]dt \\
&= \frac{A^2}{2T}\int_T dt - \frac{1}{2T}\int_T cos(2\omega_0 t)dt \\
&= \frac{A^2}{2T}[t]_0^T - \frac{1}{2T}\frac{1}{2\omega_0}[sen(2\omega_0 t)]_0^T \\
&= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2\pi}\frac{1}{2\omega_0}[sen(2\omega_0 T) - sen(0)] \\
& \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \\
&= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2\pi}\frac{1}{2\omega_0}\left[sen\left(2\frac{2\pi}{T}T\right) - sen(0)\right] \\
&= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2\pi}\frac{1}{2\omega_0}[0 - 0] \\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la potencia media total de una señal senoidal está dada por:

$$S_T\{A^2 sen(\omega_0 t)\} = \frac{A^2}{2} \tag{2.16}$$

Energía media total

Vamos a trabajar un poco con la ecuación 2.4 para definir una forma de calcular el promedio de energía consumida en función de la potencia de la señal. Así entonces se despeja la energía de la ecuación 2.4

$$\xi\{f(t)\} = lim_{T\to\infty}\, T \times S_T\{f(t)\} \tag{2.17}$$

Sustituyendo la ecuación 2.14 en la ecuación 2.15 tenemos

$$\begin{aligned} \xi\{A^2 sen(\omega_0 t)\} &= lim_{T\to\infty} T \times S_T\{A^2 sen(\omega_0 t)\} \\ &= \infty \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Entonces la energía media total es

$$\xi\{A^2 sen(\omega_0 t)\} = \infty \tag{2.18}$$

Valor eficaz de una señal potencia periódica

Siendo $f(t)$ una señal potencia periódica, el valor eficaz se calcula como

$$\boxed{f_{RMS} = \sqrt{S\{f(t)\}}} \tag{2.19}$$

Sustituyendo la ecuación 2.6 en la ecuación 2.19 se logra

$$\boxed{f_{RMS} = \sqrt{lim_{T\to\infty} \int_T \frac{f^2(t)dt}{T}}} \tag{2.20}$$

A continuación se enlistan los valores eficaces para las señales típicas de amplitud pico "A":

Senoidal	$A\sin(\omega_0 t)$	$A/\sqrt{2}$
Cuadrada		$A/\sqrt{1}$
Triangular		$A/\sqrt{3}$

La serie trigonométrica de Fourier

Teorema de descomposición espectral para señales potencia periódicas

Cualquier señal periódica puede expresarse como una combinación lineal de senos y cosenos. Es decir, siendo $f(t)$ una señal potencia periódica en T, ésta se puede expresar como:

$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(n\omega_0 t)} \quad (2.20)$$

En donde

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt} \quad (2.21)$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{\infty}^{\infty} f^2(t)cos(n\omega_0 t)dt} \quad (2.22)$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{\infty}^{\infty} f^2(t)sin(n\omega_0 t)dt} \quad (2.23)$$

Cada término de esta serie tiene un nombre que se asocial con el manejo de señales. Así

- a_0 Es la componente de directa de la señal
- $f(t)_{n=1} = a_1 cos(\omega_0 t) + b_1 sin(\omega_0 t) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sin\left(\omega_0 t + atg\,\frac{a_1}{b_1}\right)$ Es la componente espectral fundamental.
- $f(t)_{n=2} = a_2 cos(2\omega_0 t) + b_2 sin(2\omega_0 t) = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\sin\left(2\omega_0 t + atg\,\frac{a_2}{b_2}\right)$ Es la componente espectral conocida como segunda armónica.
- $f(t)_{n=3} = a_3 cos(3\omega_0 t) + b_3 sin(3\omega_0 t) = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}\,\sin\left(3\omega_0 t + atg\,\frac{a_3}{b_3}\right)$ Es la componente espectral conocida como tercera armónica.
- y así sucesivamente.

A continuación se anexan algunas series de interés que pueden servir en sesiones de laboratorio.

Diente de sierra sin componente de directa (figura 1)

$$v(t) = \frac{2V}{\pi}\left(\sin\omega_0 t - \frac{1}{2}\sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t - \cdots\right) \tag{2.24}$$

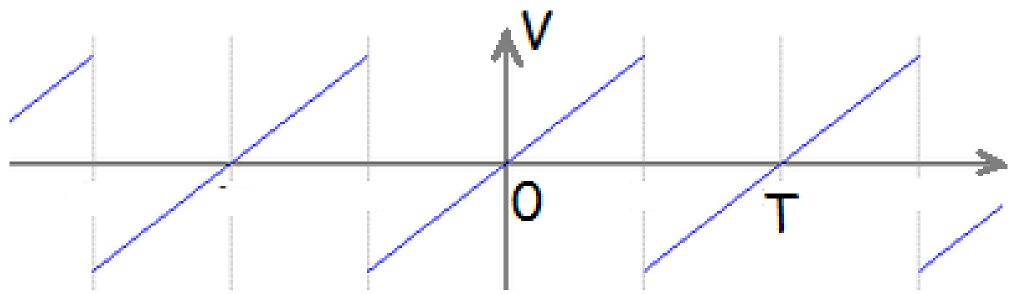


Figura 1

Señal cuadrada de simetría impar y sin componente de directa (figura 2)

$$v(t) = \frac{4V}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t - \cdots\right) \tag{2.25}$$

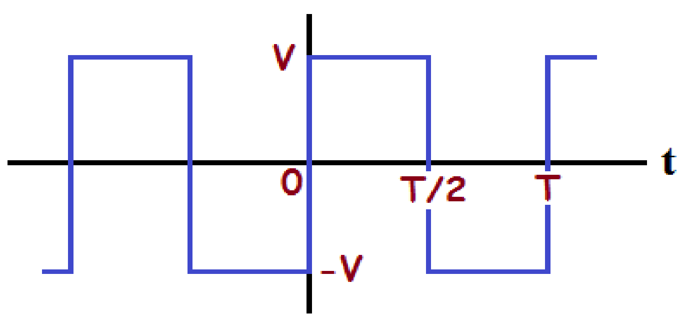


Figura 2.

Señal triangular de simetría par y sin componente de directa (figura 3)

$$v(t) = \frac{8V}{\pi^2}\left(\cos\omega_0 t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2}\cos 5\,\omega_0 t + \cdots\right) \tag{2.26}$$

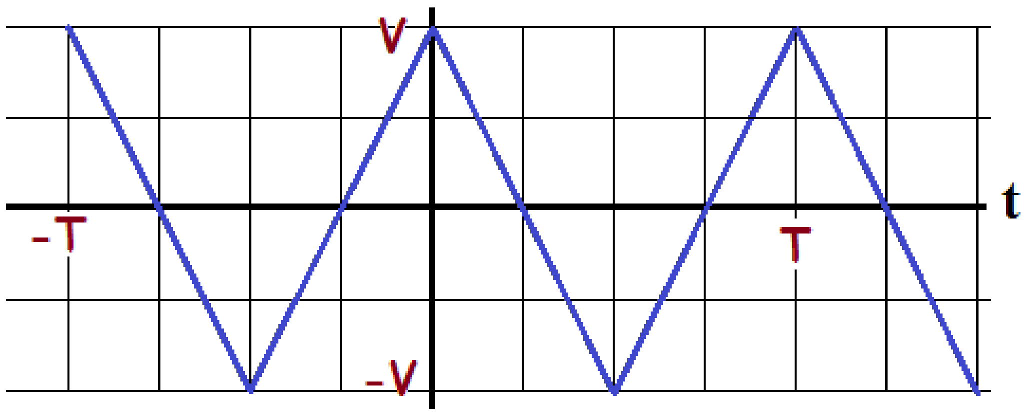


Figura 3.

Teorema de Parseval para señales potencia periódicas

Deducción matemática

Considere que la potencia media total para una señal potencia periódica se calcula, según la ecuación 2.15 como:

$$S\{f(t)\} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(t)\,dt \tag{2.24}$$

Sustituyendo una de las $f(t)$ por su equivalente serie trigonométrica, ecuación 2.20, se tiene el siguiente desarrollo

$$S\{f(t)\} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(n\omega_0 t)\right] dt \tag{2.25}$$

Resolviendo la integral se llega a la expresión siguiente

$$S\{f(t)\} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad (2.26)$$

En donde

- a_0^2: es la potencia de la componente de directa
- $\left(a_n/\sqrt{2}\right)^2$: Es la potencia de las componentes cosenoidales
- $\left(b_n/\sqrt{2}\right)^2$: es la potencia de las componentes senoidales

Enunciado del teorema de Parseval

En conclusión, el teorema de Parseval para señales potencia periódicas nos dice que la potencia media total de una señal periódica es igual a la suma de las potencias de sus componentes espectrales. Estas potencias se calcular a partir de los valores eficaces de las mismas.

Ejemplo de aplicación del teorema de Parseval para señales potencia

Para la onda cuadrada de la figura 1 calcule

a) La potencia media total
b) El valor eficaz de la misma

La STF de tal señal es:

$$v(t) = \frac{4}{\pi}\sin(\omega_0 t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega_0 t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega_0 t) + \frac{4}{7\pi}\sin(7\omega_0 t) + \frac{4}{9\pi}\sin(9\omega_0 t)$$

Ahora se expresan en forma de vector los voltajes de cada componente senoidal (la razón de esto no es otra que la simplicidad en el manejo de datos).

$$\begin{matrix} voltajes \\ pico \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 0.4444 \\ 0.2667 \\ 0.1905 \\ 0.1481 \end{bmatrix}$$

Calculando los voltajes eficaces

$$\begin{matrix} voltajes \\ eficaces \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ 0.4444 \\ 0.2667 \\ 0.1905 \\ 0.1481 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 0.9003 \\ 0.3001 \\ 0.1801 \\ 0.1286 \\ 0.1000 \end{bmatrix}$$

Calculando las potencias

$$\begin{matrix} Potencias\ de \\ componentes \\ espectrales \end{matrix} = \begin{pmatrix} voltajes \\ eficaces \end{pmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.8106 \\ 0.0901 \\ 0.0324 \\ 0.0165 \\ 0.0100 \end{bmatrix}$$

Luego, la potencia media total es la suma de las potencias de las componentes espectrales:

$$S\{v(t)\} = 0.9596$$

Finalmente, para calcular el voltaje eficaz de la señal cuadrada se aplica la ecuación (2.19), es decir, el voltaje eficaz se calcula como la raíz cuadrada de la potencia media total.

$$V_{rms} = 0.9796[V] \cong \sqrt{1}[V]$$

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una operación mediante la cual se puede calcular el espectro de una señal energía y sólo es aplicable a este tipo de señales. Las excepciones a la regla son la señal senoidal, cosenoidal y la exponencial compleja.

La ecuación mediante la cual se calcula la transformada de Fourier de una señal energía $f(t)$ es:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = F(\omega)} \quad (2.27)$$

Nótese que la integral de Fourier dicta el producto de una función real, de variable real, con una función compleja, también de variable real. El resultado del producto y así de la integral es una **función compleja de variable real**.

La ecuación que nos permite aplicar la operación inversa, es decir, calcular la función temporal a partir de su función en frecuencia es:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = f(t)} \tag{2.28}$$

Teorema de Parseval para señales energía

En [Lathi] pueden encontrarse el desarrollo de las ecuaciones que se revisarán a continuación:

Deducción del teorema de Parseval para señales energía

El cálculo de la energía media total de una señal energía quedó declarado en la ecuación 2.4, misma que se reproduce a continuación en la forma

$$\boxed{\xi\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t)dt\,[v^2 s]} \tag{2.29}$$

A su vez, sabemos que $f(t)$ puede definirse mediante la transformada inversa de Fourier definida en la ecuación 2.28. Así que sustituyendo resulta

$$\boxed{\xi\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega dt} \tag{2.30}$$

La primera integral puede meterse en la segunda, dado que sus variables son independientes.

$$\boxed{\xi\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dtd\omega} \tag{2.31}$$

La segunda integral corresponde con la transformada conjugada de Fourier, así entonces:

$$\xi\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega \tag{2.31}$$

:

Observe que la ecuación (2.31) nos indica que el cálculo de la energía media total de una señal energía ha quedado expresado como una operación en el dominio de la frecuencia. Entonces podemos expresar que

El cálculo de la energía media total, de una señal energía, en el dominio del tiempo es numéricamente igual al cálculo de la energía media total en el dominio de la frecuencia. Esto queda expresado en la forma

$$\xi\{f(t)\} = \xi\{F(\omega)\} \tag{2.32}$$

Función densidad espectral de energía

La función densidad espectral de energía se define como el producto siguiente:

$$\xi_{FF}(\omega) = F(\omega)F^*(\omega) \tag{2.33}$$

Este producto no tiene unidades de energía, es más bien el cálculo del área bajo su curva lo que nos dará la energía media total de la señal. En forma de ecuación se tiene que

$$\xi\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi_{FF}(\omega)\, d\omega \tag{2.34}$$

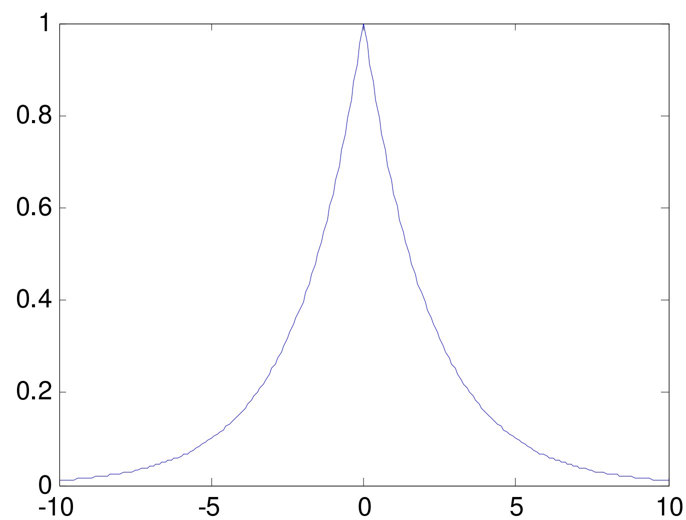
Ejemplo: cálculo de la curva función densidad espectral de energía

Calcule y grafique la función densidad espectral de energía de la siguiente función exponencial bilateral.

$$f(t) = e^{-\propto|t|}; \quad \propto = 0.460517018 \tag{2.35}$$

La función temporal

La gráfica de la exponencial bilateral se exhibe en la figura 4. Esta gráfica fue generada en MATLAB con el código que se puede apreciar en la misma figura.




```
a=0.460517018;
t=-10:0.1:10;
ft=exp(-a*abs(t));
figure(1)
plot(t,ft)
```

Figura 4. Gráfica de la función exponencial bilateral para un $\propto = 0.460517018$. A la derecha de la gráfica puede apreciarse el código en MABLAB que general tal gráfica.

La transformada de Fourier

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (2.35), se logra

$$\mathcal{F}\{e^{-\propto|t|}; \quad \propto = 0.460517018\} = \frac{2\propto}{\propto^2 + \omega^2}; \propto = 0.460517018$$

Sustituyendo números resulta en

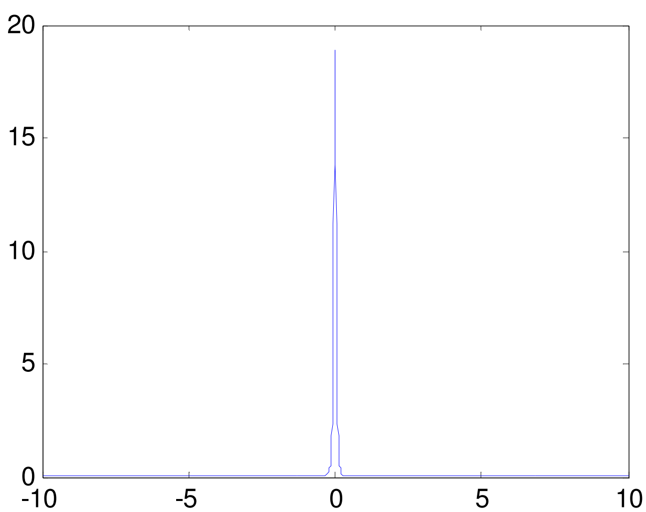
$$\mathcal{F}\{e^{-\propto|t|};\quad \propto = 0.460517018\} = F(\omega) = \frac{0.9210}{0.2121 + \omega^2} \tag{2.36}$$

La función densidad espectral de energía

La función densidad espectral de energía se obtiene aplicando la ecuación (2.33) por lo cual resulta

$$\xi_{FF}(\omega) = \frac{4 \propto^2}{\propto^4 + 2 \propto^2 \omega^2 + \omega^4};\quad \propto = 0.460517018 \tag{2.37}$$

La gráfica de esta función y el código M para MATLAB que general tal gráfica pueden verse en la figura 5.




```
a=0.460517018;
f=-10:0.01:10;
w=2*pi*f;
Fw=2*a./(a*a+w.*w);
E_FFw=Fw.*conj(Fw);
figure(2)
plot(f,E_FFw)
```

Figura 5. Función densidad espectral de energía de la exponencial bilateral para un $\propto = 0.460517018$.

Ejemplo de aplicación del teorema de Parseval

Calcule la energía media total de la señal exponencial unilateral siguiente en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

$$\boxed{f(t) = e^{-\propto t}u_{-1}(t); \quad \propto = 0.460517018} \tag{2.35}$$

Sustituyendo valores en la ecuación 2.12, el cálculo de la energía media total es:

$$\boxed{\frac{1}{2\propto} = 1.08573} \tag{2.36}$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación 2.33, logramos

$$\boxed{\mathcal{F}\{e^{-\propto t}u_{-1}(t); \quad \propto = 0.460517018\} = \frac{1}{\propto + j\omega} = F(\omega)} \tag{2.37}$$

Ahora se calcula la función densidad espectral de energía:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_{HH}(\omega) &= F(\omega)F^*(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\propto^2 + \omega^2}} e^{-atg\left(\frac{\omega}{\propto}\right)} \end{aligned}} \tag{2.38}$$

Calculando el área bajo la curva de la función densidad espectral de energía se tiene que

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi_{HH}(\omega)\, d\omega = 1.08573} \tag{2.39}$$

Propiedades de la convolución

Conmutatividad

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

Asociatividad

$$f(t) * g(t) * h(t) = f(t) * \big(g(t) * h(t)\big) = \big(f(t) * g(t)\big) * h(t)$$

Impulso (identidad)

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$f(t) * \delta(t-\tau) = f(t-\tau)$$

Distributividad o aditividad

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

Homogeneidad

$$Af(t) * g(t) = A\big(f(t) * g(t)\big)$$

$$f(t) * Bg(t) = B\big(f(t) * g(t)\big)$$

$$Af(t) * Bg(t) = AB\big(f(t) * g(t)\big)$$

Linealidad: homogeneidad y aditividad

$$\big(Af(t) + Bg(t)\big) * h(t) = Af(t) * h(t) + Bg(t) * h(t)$$

Invariancia temporal

$$f(t-\alpha) * h(t) = y(t-\alpha)$$

$$f(t) * h(t-\beta) = y(t-\beta)$$

$$f(t-\alpha) * h(t-\beta) = y(t-\alpha-\beta)$$

Propiedades de la correlación

Sin conmutatividad

Suponga que se define la correlación de $f(t)$ con $g(t)$ de la forma que sigue

$$f(t) ** g(t) = h(t)$$

Si se invierte el orden de los operandos se tiene que:

$$g(t) ** f(t) = h(-t)$$

Asociatividad

$$f(t) ** g(t) ** h(t) = f(t) ** \big(g(t) ** h(t)\big) = \big(f(t) ** g(t)\big) ** h(t)$$

Impulso

$$f(t) ** \delta(t) = f(-t)$$

Distributividad

$$f(t) ** [g(t) + h(t)] = f(t) ** g(t) + f(t) ** h(t)$$

Homogeneidad

$$Af(t) ** g(t) = A\big(f(t) ** g(t)\big)$$

$$f(t) ** Bg(t) = B\big(f(t) ** g(t)\big)$$

$$Af(t) ** Bg(t) = AB\big(f(t) ** g(t)\big)$$

Linealidad: homogeneidad y aditividad

$$\big(Af(t) + Bg(t)\big) ** h(t) = Af(t) ** g(t) + Bg(t) ** h(t)$$

Simetría par

Si se define $h(t)$ como la correlación de la función $f(t)$ con sigo misma: autocorrealción

$$h(t) = f(t) ** f(t)$$

Entonces se cumple que $h(t)$ es función par, es decir:

$$h(t) = h(-t)$$

Equivalencia con la conmutatividad

La equivalencia se expresa como:

$$f(t) ** g(t) = f(t) * g(-t)$$

Consideremos el siguiente desarrollo en el cual se desea conocer la convolución $f(t)$ con $g(-t)$ evaluada en un tiempo τ. El procedimiento se describe entonces como:

- $f(t)$ se mantiene fija
- $g(-t)$ se refleja y retrasa en τ, es decir t cambia por $-(t-\tau)$. Entonces la función queda como:

$$g\big(--(t-\tau)\big) = g(t-\tau)$$

- Las funciones se multiplican (punto a punto como en todo producto de funciones).

$$f(t)g(t-\tau)$$

- Se calcula el área del producto.

$$\boxed{f * g(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)[v^2]dt[s]} \tag{2.19}$$

La cual es la fórmula de la correlación entre $f(t)$ y $g(-t)$ evaluada en un tiempo τ, es decir:

$$f * g(-\tau) = f ** g(\tau)$$

Realizando el cambio de variable $t \leftrightarrow \tau$ podemos concluir que

$$f(t) ** g(t) = f(t) * g(-t)$$